ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Ας είναι y_μ: μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε:

$$(E):\ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b\ ,\quad a_n(x) \neq 0,\ \forall x \in I$$

Τότε η y λύση της (E)
αν-ν $\exists\ \tilde{y}$ λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$(E_0):\ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

έτσι ώστε: $y = y_\mu + \tilde{y}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω $b_1, b_2, \dots, b_n \in C(I)$ ώστε $b = b_1 + \dots + b_n$
Αν $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της εξίσωσης (E), τότε και η $y = y_1 + \dots + y_n$ λύση της (E)

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ΒΣΛ της (E_0) και ας είναι $v_1, \dots, v_n$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} v_1' y_1 + \dots + v_n' y_n = 0 \\ v_1' y_1' + \dots + v_n' y_n' = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + \dots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{a_n}{b_n} \end{cases}$$

Τότε μια μερική λύση της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε είναι η συνάρτηση:
$y_\mu = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Έστω x_0 σημείο στο I και $\{y_1, \dots, y_n\}$ ΒΣΛ της (E_0). Ας είναι $W_i(y_1, \dots, y_n)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ η ορίζουσα WRONSKI που προκύπτει από την $W(y_1, \dots, y_n)$ αν αντικατασταθεί η i-στήλη εκ τη στήλη $(0, 0, \dots, 0, 1)$. Τότε η y_μ

$$y_\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(y_1, \dots, y_n)(t)}{W(y_1, \dots, y_n)(t)} \frac{b(t)}{a_n(t)}\, dt\ ,\quad x \in I$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: Έστω x_0 σημείο στο I και $\{y_1, y_2\}$ ΒΣΛ της (E_0) $2^{ης}$ τάξης. Τότε:

$$y_\mu(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{W_1(y_1, y_2)(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \frac{b(t)}{a_2(t)}\, dt + y_2(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{W_2(y_1, y_2)}{W(y_1, y_2)} \frac{b(t)}{a_2(t)}\, dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x) \cdot y_1(t) - y_1(x) \cdot y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \frac{b(t)}{a_2(t)}\, dt$$

(ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 4)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

SOS

1) Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική Δ.Ε

$$x^3 \cdot y''' - 4x^2 \cdot y'' + 8xy' - 8y = 2x^4 \cdot \log x, \quad x>0$$

αφού πρώτα βρεθούν τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, της μορφής x^ν, $\nu \in \mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

$$x^3 \cdot \nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3} - 4x^2 \cdot \nu(\nu-1)x^{\nu-2} + 8x\nu x^{\nu-1} - 8x^\nu = 0$$

.... και από το παράδειγμα 2 του προηγούμενου φυλλαδίου λυμένων ασκήσεων προκύπτουν ότι:

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ και $y_3(x) = x^4$, $\forall x>0$

τα οποία αποτελούν ένα ΘΣΛ $\{y_1, y_2, y_3\}$.

ενώ παράλληλα όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $\tilde{y} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 \cdot x^4$, $\forall x>0$, c_1, c_2, c_3: αυθ. σταθ.

Έπειτα, για κάθε $x>0$, θεωρούμε σύστημα

$$\begin{cases} v_1'(x) \cdot y_1(x) + v_2'(x) y_2(x) + v_3'(x) y_3(x) = 0 \\ v_1'(x) y_1'(x) + v_2'(x) y_2'(x) + v_3'(x) y_3'(x) = 0 \\ v_1'(x) \cdot y_1''(x) + v_2'(x) \cdot y_2''(x) + v_3'(x) \cdot y_3''(x) = \dfrac{2x^4 \cdot \log x}{x^3} = 2x\log x \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x \cdot v_1'(x) + x^2 \cdot v_2'(x) + x^4 \cdot v_3'(x) = 0 \\ v_1'(x) + 2x v_2'(x) + 4x^3 \cdot v_3'(x) = 0 \\ 2 v_2'(x) + 12x^2 v_3'(x) = 2x\log x \end{cases}, \quad \forall x>0$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} v_1'(x) + x v_2'(x) + x^3 v_3'(x) = 0 \\ v_1'(x) + 2x v_2'(x) + 4x^3 v_3'(x) = 0 \\ v_2'(x) + 6x^2 \cdot v_3'(x) = x\log x \end{cases}, \quad \forall x>0$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι

$v_1'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^2 \cdot \log x$, $v_2'(x) = -x\log x$, $v_3'(x) = \frac{1}{3}\frac{\log x}{x}$, $x>0$

ολοκληρώνοντας τις v_1, v_2, v_3 αντίστοιχα, έχουμε:

$v_1(x) = \frac{2}{9}x^3\left(\log x - \frac{1}{3}\right)$, $v_2(x) = -\frac{1}{2}x^2\left(\log x - \frac{1}{2}\right)$, $v_3(x) = \frac{1}{6}(\log x)^2$

τότε από θεώρημα 3:

$$y_M = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = x^4 \cdot \left(1/6 \cdot \log^2 x - 5/18 \log x + 19/108\right), \quad x>0$$

Επομένως, όλες οι λύσεις της Δ.Ε, θα δίνονται από τη σχέση (Θεώρημα 1)

$$y(x) = y_\mu(x) + \tilde{y}(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 + x^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\log^2 x - \frac{5}{18}\log x + \frac{19}{108}\right), x>0$$

2) Να βρεθεί η μερική λύση (y_μ) της μη ομογενούς γραμμικής Δ.Ε:

$$y''' - y'' + y' - y = 1$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_\mu(0) = y'_\mu(0) = y''_\mu(0) = 0$, εάν είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξ.

ΛΥΣΗ

Από Θεώρημα 4:

$$y_\mu(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(y_1,y_2,y_3)(t)}{W(y_1,y_2,y_3)(t)}\, dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

όπου για κάθε $i \in \{1,2,3\}$, η $W_i(y_1,y_2,y_3)$ είναι η ορίζουσα WRONSKI που προκύπτει από την $W(y_1,y_2,y_3)$ αν αντικατασταθεί η i-στήλη της με τη στήλη $(0,0,1)$. Άρα, επί του προκειμένου:

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 2e^x$$

(όπου το $2e^x$ μπορεί να προκύψει και με το Θεώρημα 5 του προηγούμενου φυλλαδίου ασκήσεων αντί να αναπτύξουμε την ορίζουσα)

$$W_1(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1$$

$$W_2(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 & \sin x \\ e^x & 0 & \cos x \\ e^x & 1 & -\sin x \end{vmatrix} = e^x \cdot (\sin x - \cos x)$$

$$W_3(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & 0 \\ e^x & -\sin x & 0 \\ e^x & -\cos x & 1 \end{vmatrix} = -e^x \cdot (\sin x + \cos x)$$

Άρα, στην (1) έχουμε:

$$y_M(x) = e^x \int_0^x \frac{1}{2e^t}\, dt + \cos x \int_0^x \frac{1}{2} \cdot (\sin t - \cos t)\, dt +$$
$$+ x \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\right)(\sin t + \cos t)\, dt.$$

3) Να βρεθεί μια μερική λύση y_M της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $2^{ης}$ τάξης
$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = x \cdot \log x \quad , x>0$
που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_M(1) = y'_M(1) = 0$
με το δεδομένο ότι $y_1(x) = x$ & $y_2(x) = x\log x$, $x>0$
είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες της αντίστοιχης ομογενούς.

ΛΥΣΗ

$$y_M(x) = \int_1^x \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_2(t) \cdot y_1(x)}{y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t)} \cdot \frac{t \log t}{t^2}\, dt =$$

$$= \int_1^x (x \log x - x \log t) \cdot \frac{\log t}{t}\, dt =$$

$$= x \log x \int_1^x \frac{\log t}{t}\, dt - x \int_1^x \frac{\log^2 t}{t} = \frac{1}{6} x \cdot \log^2 x, \quad x>0$$